

# 國學院大學學術情報リポジトリ

## 〔研究ノート〕 大学院への(での)マクロ経済分析道具箱(2)

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 公開日: 2023-02-06 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 細谷, 圭 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="https://doi.org/10.57529/00001032">https://doi.org/10.57529/00001032</a>

---

---

## 大学院への（での）マクロ経済分析道具箱（2）\*

■ 細 谷 圭†

---

### ▶ 要 約

本稿は大学院レベルのマクロ経済学で遭遇する「難所」の通過をサポートする目的で編まれる教育的な解説論文である。今回は特別なテクニックを解説するのではなく、連続型の最適成長モデル系列の内生的成長モデルの数学的な展開をなるべく丁寧にトレースし、この種のモデルの解きほぐし方を実演する。ただし取り上げるモデルは、通常と異なりかなり複雑な構造を有すると考えられる Dioikitopoulos and Kalyvitis モデル (2015, *Journal of Public Economic Theory*, Vol. 17, No. 6) である。このモデルでは、長期の定常均衡が一意的に定まらず、複数の均衡が併存する、いわゆる複数均衡が生じる可能性がある。こうした帰結の源は、経済主体の時間選好がモデルの内生変数に依存する内生的時間選好メカニズムの導入に求められる。将来に対する考え方の違いが、長期的な所得成長率に大きな格差を生み出す様子が示される。本稿では彼らが提示した数値解析例をまず再現し、その後で多角的な観点から解析結果の改善を試みている。本稿の解説により、移行動学および安定性分析の前の段階における動学モデル分析の進め方をステップ・バイ・ステップで確認することができる。

### ▶ キーワード

大学院レベルのマクロ経済学（上級マクロ経済学）、経済成長理論、内生的成長モデル、複数均衡、数値解析

---

\* 本稿は群馬県・猿ヶ京温泉で開催された 2018 浅研みなかみコンファレンスにおける報告のために執筆されたものである。有益なコメントを頂戴した浅子和美（立正大学）、中村勝克（立正大学）、落合勝昭（日本経済研究センター）、笠原哲也（新潟大学）、李綱（東洋大学）の諸先生方に感謝したい。また、コンファレンスの運営をサポートしていただいた陳燕氏（東京工業大学）にも感謝したい。本稿と密接に関係する研究プロジェクトは、JSPS 科研費基盤研究 C（課題番号 15K03448）の助成を受けている。記して感謝したい。あり得べき誤謬の責は当然筆者に帰すものである。

† 國學院大學経済学部

1. はじめに
  2. Dioikitopoulos and Kalyvitis (2015) モデルの全体像
    - (1) 基本設定と動学体系
    - (2) 縮約された動学体系と均衡探索の準備
    - (3) 均衡が一意に決まるケース
    - (4) 複数均衡が生じるケース
    - (5) 数値例と図解
  3. まとめに代えて—これから先の分析の進め方
- 参考文献

## 1. はじめに

---

本稿は大学院レベルのマクロ経済学で遭遇する「難所」の通過をサポートする目的で編まれる教育的な解説論文(研究ノート)として位置づけられる。このシリーズ論文の最初のもは、筆者が前職の東北学院大学経済学部在職中に『東北学院大学経済学論集』に掲載された細谷(2015)である。今回は筆者が近年において取り組んでいる複数均衡が生じる経済成長モデルに関する話題をテーマとしたい。前回は位相図(フェーズ・ダイアグラム)という経済動学の分析に極めて特徴的なツールを検討したが、今回は動学モデル分析における数学的な議論の進め方を明解なかたちで紹介・検討していこうと思っている。

先ほど複数均衡モデルを取り上げると述べたが、まずはこれをきちんと類別しておくべきであろう。現在、アカデミックな用語法において「複数均衡」という場合、一意的に決まる長期均衡に対して複数の(厳密には無数の)均斉成長経路(Balanced Growth Path; BGP)が生じる場合も含まれるのが一般的である(Benhabib and Farmer, 1994; Benhabib and Perli, 1994)。これはいわゆる局所的不決定性(local indeterminacy)という概念に対応する。異なる経済発展プロセスを説明する際に、局所的不決定性は有力な考え方の一つであり、1990年代から数多くの研究論文が生み出されている<sup>1)</sup>。

これに対して、一般的な意味での「複数性(multiplicity)」により直結しているのが大域的な不決定性(global indeterminacy)である。こちらはまさに長期均衡が複数存在することを意味している。異なる経済状態の国々が一つのモデルの中に並存し、しかもその差異が長期的に永続する場合に対応しているといえよう。おもに経済主体の自己実現的期待(self-fulfilling expectations)の形成様式の違いによって、選択される長期均衡が変わってくるのである<sup>2)</sup>。以下、本稿において複数均衡という場合は、大域的な複

---

1) 日本語で書かれたものに限定して紹介すると、第一線の研究者による不決定性に関する包括的なサーベイ論文として三野(2003)がある。また、非線形体系の均衡動学全般に関するまとまった研究書として西村・福田編(2004)がある。一方で、中級以上のマクロ経済学を修得し、これから動学マクロ経済学を本格的に学んでいこうとする人にとって有益な書籍として大住ほか編(2006)、西村・矢野(2007)、中田(2011)、そして二神(2012)などを推奨しておきたい。

2) 著名な複数均衡モデルとして、ビッグプッシュの有無によって行き着く長期均衡が決まるタイプのモデルがある(たとえば, Barro and Sala-i-Martin, 2003, 第1章)。こうしたモデルは、資本ストック水準によって体现される「歴史」が、選ばれる均衡を支配するモデルであるから、経路依存性(path dependency)を有する(初期条件によって経済の収束先が決定される)。したがって、こうしたタイプのモデルでは複数均衡が生じるものの、それらの長期均衡は大域的に不決定的ではなく「決定的」であるといえることができる。換言すれば、(貧困の罠のような)均衡を変えるためには、歴

数均衡のことを指すものとしよう。こうした複数均衡が生み出されるモデル上の「仕掛け」は、瞬時的効用関数 (instantaneous utility function) や生産関数の定式化を工夫することに求められるのが一般的である<sup>3)</sup>。ここでは、こうしたものとは一線を画した大変興味深いモデルの解析作業を通じて、所期の目的を達成したいと考えている。均衡の複数性をもたらす要素として注目するのは、宇沢弘文先生 (Uzawa, 1968) によって現代的な意味ではじめて注目され、Epstein and Hynes (1983) や Obstfeld (1990) によって彫琢されてきた、時間選好率の可変性を考慮する内生的時間選好率 (endogenous time preference) という考え方である。時間選好が消費水準、所得水準、種々の資本ストック水準、そして効用水準などによって規定されてくることは自然な想定であり、このことが均衡の複数性の源泉になるとしても不思議なことではない<sup>4)</sup>。近年は、行動経済学や実験経済学の発展により、理論的なアイデアが実証研究によって深掘りされるようになってきている。本稿の趣旨に鑑みて、内生的時間選好の詳細には立ち入らない。関心のある方は、池田 (2003)、Kawagishi (2014)、太田代 (唐澤) (2016) などを参照していただきたい。

前置きが少し長くなったのでもう一度本稿の主題を確認しておく。すなわち、内生的時間選好によって複数均衡が生じる内生的成長モデルに依拠し、均衡解の特徴づけを行っていくプロセスをなるべく明解かつ丁寧に考察することが本稿の主題である。筆者がこのためのベンチマークモデルとして適切と考えるのが Dioikitopoulos and Kalyvitis (2015, *Journal of Public Economic Theory*, Vol. 17, No. 6) である。はじめに彼らのモデルの全体像を簡単に説明し、その後具体的な解析作業に入る。何を確かめるためにどんな数学的処理が必要なのかを明らかにしながら検討を進めていきたい。

---

史を覆すような何か (非常に大規模な社会的投資等) が必要になるのである。

- 3) 効用関数との関連では、異時点間の代替の弾力性パラメータについてかなり大きな異時点間代替を許容するような場合に複数均衡が発生することが知られている
- 4) 標準的な最適成長理論をベースとした成長モデルでは、時間選好率は外生的に与えられ、ある一定率をとるものと仮定されることが殆どである。この仮定は経済学的な背景から来ているというよりは、分析上の簡便性を優先してのものである (Das, 2003)。とりわけ、定常均衡解の特徴づけが容易になるという利点がある。

## 2. Dioikitopoulos and Kalyvitis (2015) モデルの全体像

### (1) 基本設定と動学体系

まず確認しておきたいのは、彼らの基本モデルが分権経済 (decentralized economy) モデルとして設定されている点である。したがって、社会的計画経済 (集権経済) と比較すると、変数の取り扱いに関して特徴的な違いが生じることになる。たとえば、公共インフラストックのような社会的に外生的に決められる変数に関しては、代表的経済主体の最適化行動においては与件 (given) となる。本モデルの主たる特徴である時間選好率の取り扱いに際しても、分権経済の設定が重要な仮定となることは後ほど明らかになる。

まず経済の生産 (供給) サイドから説明を開始しよう。完全競争市場の仮定の下で、企業  $i$  は利潤  $\pi_i$  を最大化するものとしよう。なお、経済全体での企業数は 1 に規準化される。生産要素は物的資本  $K_i$  と効率労働  $hL_i$  であるが、労働増加的な要素として組み込まれる  $h$  に関してはすぐ後で言及する。この状況下で、企業  $i$  の生産関数を次のように書くことができる。

$$Y_i = K_i^a (hL_i)^{1-a}, \quad 0 < a < 1 \quad (1)$$

ここで  $h$  は労働生産性を表現する要素であり、さまざまなものが考えられるが、本モデルではこれを人的資本ストックとして定式化する。つまり、知識ある労働力ほど生産に貢献すると考えるわけである。ただしここでは、よく知られたルーカスモデルのように、各経済主体が人的資本投資 (教育投資) の意思決定を行うことはない。誰もがアクセス可能な知識ストック  $H$  が社会的に形成され、 $h$  はその 1 人あたり量だと考えるのである<sup>5)</sup>。経済全体での労働力  $L$  は  $\int_0^1 L_i di = L$  となるから、 $h = H/L$  である。このことは知識の公共財的性質を表すものといえる。

次に企業の利潤最大化行動を描写しよう (最終財価格を 1 とする)。企業  $i$  は粗利潤の中から物的資本への支払い (資本減耗を含む)、労働への支払いを行い、さらに租税を産出 (所得) に関する比例税として負担する。この租税負担は社会的な人的資本投資の財源となる。利潤関数は次のように表せる ( $\tau$  は比例税率、 $r$  は資本のレンタル価格、 $w$  は賃金率、 $\delta_K$  は各企業に共通の物的資本減耗率)。

5) 公共的な知識ストックの 1 人あたり量を考えることの適切性に関しては議論の余地がある。

$$\begin{aligned}\pi_i &= Y_i - (rK_i + \delta_K K_i + wL_i) - \tau Y_i \\ \pi_i &= (1 - \tau)K_i^a (hL_i)^{1-a} - (rK_i + \delta_K K_i + wL_i)\end{aligned}\quad (2)$$

利潤関数 (2) に対して利潤最大化条件を適用し計算すると、各要素価格を求めることができる。

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial K_i} = (1 - \tau)a \left( \frac{K_i}{hL_i} \right)^{a-1} - r - \delta_K = 0 \iff r = (1 - \tau)a \left( \frac{K_i}{hL_i} \right)^{a-1} - \delta_K \quad (3)$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial L_i} = (1 - \tau)(1 - a) \left( \frac{K_i}{L_i} \right)^a h^{1-a} - w = 0 \iff w = (1 - \tau)(1 - a) \left( \frac{K_i}{L_i} \right)^a h^{1-a} \quad (4)$$

これらは彼らの論文中 855 頁の結果と同じになる。

続いて二つのストック変数の遷移式について説明しよう。まず物的資本ストックについては標準的なものであり、フローの投資  $I_i$  から資本減耗分を差し引いたものが資本ストックの増加分となる。一方、人的資本は個別経済主体の教育投資（教育時間投資）に依らず、政府部門の公的投資によって蓄積されていくと考える。そしてこの社会的な知識ストックは一定率で減耗する。これら二本の動学方程式は次のように表すことができる。

$$\dot{K}_i = I_i - \delta_K K_i \quad (5)$$

$$\dot{H} = vI_H - \delta_H H \quad (6)$$

ここで、 $v$  は教育ないしは知識蓄積の効率性を表すパラメータである。また、 $\delta_H$  は定率の人的資本ストック減耗率であり、現実には知識や教育技術の陳腐化を捉えるものと考えられる。先に述べたように、公的教育投資の財源は民間部門から比例税によって徴収される。政府部門に関しては、各時点で均衡財政が維持されるものと仮定する。したがって、経済全体では  $I_H = \tau \int_0^1 Y_i di = \tau Y$  が成立する。

以上で生産サイドの大まかなスケッチは終了した。次に本モデルの中核部分である効用関数の説明に移ろう。まず通常のように、無限期間生存する代表的経済主体の存在を仮定する。瞬時的効用関数は 1 人あたり消費  $c$  に基づく CRRA 型として、目的関数は次のように表すことができる。

$$\int_0^\infty \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} \exp \left[ - \int_0^t \rho(C(s), H(s)) ds \right] dt, \quad 0 < \sigma \leq 1$$

目的関数の後ろのパートが時間選好率関数 (time preference function) である。詳細を説明する前に、時間選好率を左右する二つの要素に着目しよう。それらはマクロレ

ベルでの総消費  $C$  と総人的資本(総知識ストック)  $H$  であり、大文字で表記されていることがポイントである。つまり、個別経済主体の効用にこれらは間違いなく影響するのだが、彼らの最適化行動においては、操作不可能という意味で所与(given)のものとして取り扱われるのである。このことは経済学的な意味に加え、モデルを解析的に解く際にも非常に重要な想定となる。このことについては、実際に最適化問題を解く前後で再度指摘する。

さて、彼らの論文では、時間選好率関数が以下の三つの仮定によって特徴づけられている。

$$\text{仮定 1: } \rho(C, H) \geq \bar{\rho} > 0$$

$$\text{仮定 2: } \rho(C, H) = \rho\left(\frac{C}{H}\right)$$

$$\text{仮定 3: } \rho'(\cdot) \geq 0, \rho''(\cdot) \leq 0$$

それぞれについて考えていこう。仮定 1 は、時間選好率はプラスの値をとり、さらに下限の値  $\bar{\rho}$  をもつことを意味する。これは標準的な仮定と考えてよいだろう。次に仮定 2 より、総人的資本に対する総消費の比率に依存して時間選好率が決まることになる。仮定 3 により、関数のプロパティが指定される。

仮定 3 についてはいくつかの可能性が考えられるが、本稿ではあくまで Dioikitopoulos and Kalyvitis (2015) の定式化に沿った説明を行う。1 階微分が基本的にプラスであるというのは、 $C/H$  と時間選好率が正の相関関係にあるということである。つまり、人的資本に対してマクロレベルでの消費水準が高いほど、各経済主体はより「せっかち(impatience)」な経済主体として特徴づけられる。だが、2 階微分より、せっかちさの程度は逡減していくことが想定されている。これらについて、全般的な解釈は次のようになるだろう。経済が豊かになりマクロレベルで皆が多くの消費をするようになると、各経済主体は世間の大勢に後れをとらぬように考え行動し、自らの消費に対してより性急になるという一つのストーリーが描ける。しばしば“keep up with the Joneses”という表現(「隣のジョーンズ家の人たちに負けるな! 急げ!!」)に象徴される家計行動である。これは消費を時間選好の決定要因とした先行研究でしばしば語られる行動仮説だが、Dioikitopoulos and Kalyvitis (2015) ではもう一つ別の影響経路も考えることができる。分母にとられている総人的資本ストックを通じた経路である。経済全体で知識ストックの蓄積が進むと、各経済主体はより(賢明に)辛抱強くなり、現在ではなく将来のより一層実り豊かな果実(消費)を得ようと行動するという行動仮説が考えられる。

以上、仮定 1~3 を踏まえ、比率変数  $C/H$  の大きさによって内生的に時間選好率が決まってくる。標準的なモデルと異なり、もはや時間選好率は外生変数ではないから、定常成長均衡ないしは均斉成長経路において追加的な条件を満たすことが必要である。すな

わち、定常均衡で時間選好率が有界でなければならない。言い換えると、 $C/H$  が長期均衡で一定値に収束することにより、時間選好率  $\rho(\cdot)$  も一定値に収束する必要がある。後で述べるように、均斉成長経路上では  $C$  も  $H$  も同率で成長するのでこの条件は満たされる。

これまでに説明してきたような状況設定を踏まえて、代表的経済主体は異時点間にわたる動学的最適化問題を解くことになる。これはフォーマルには次のように表すことができる。

$$\max_c \int_0^{\infty} \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} \exp\left[-\int_0^t \rho(C(s), H(s)) ds\right] dt \quad (7)$$

subject to

$$\dot{A} = rA + w - c, \quad A(0) > 0 \quad (8)$$

$A$  は 1 人あたり金融資産ストックである。(8) は資産所得と労働所得の合計から消費を差し引いたものが投資へ振り向けられることを意味する代表的経済主体の所得制約式である。

この最適化問題において重要なのは、時間選好率は時間を通じて一定ではないが、経済主体にとって与件となることである。また、政府の公共政策に関しても同様である。すなわち、人的資本水準  $H$  や税率  $\tau$  に関しても関与できない。こうした状況下で消費の最適経路を選択するのである。(7) と (8) より、経常価値ハミルトニアン  $J$  は次のように書くことができる。

$$J \equiv \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \lambda[rA + w - c] \quad (9)$$

ただし  $\lambda$  は制約式に関連した共役変数である。最適化のための 1 階の条件と状態変数  $A$  に関する横断性条件 (transversality condition) は以下のように求められる。

$$\frac{\partial J}{\partial c} = 0 \iff c^{-\sigma} = \lambda \quad (10)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial J}{\partial A} + \lambda\rho(\cdot) \iff \dot{\lambda} = -\lambda r + \lambda\rho(\cdot) \quad (11)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)A(t)e^{-\rho(\cdot)t} = 0 \quad (12)$$

(10) より  $\dot{\lambda}/\lambda = -\sigma(\dot{c}/c)$  となるから、これを (11) に代入し整理すると 1 人あたり消費の成長率を規定する動学方程式 (最適成長モデルのケインズ・ラムゼールールに対応) が得られる。

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma} [r - \rho(\cdot)] \quad (13)$$

これは原論文 855 頁の (8) に一致する。

ここまでのところで、モデル設定の巧妙さに気づいたであろうか。分権経済下で、内生的時間選好の要素となっていたのは総消費水準  $C$  と総人的資本水準  $H$  であって、これらは経済主体にとって与件である。もしここに制御変数や状態変数が関与していたら、モデルがより複雑なものとなることは避けられない。この点で「巧い設定」になっている。重複するポイントだが、人的資本が公的にのみ供給されるという設定はやや違和感があるが、解析作業をライトにするという点では大きな役割を果たしていると考えられる。

ところで、このモデルにおける経済主体（個人や企業）は同質かつ対称であり、その数は 1 に規準化されているから、均衡条件として  $K_i = K$  および  $L_i = L$  が適用可能である。 $A$  についても定義から  $A = K/L$  であるが、規準化によって均衡では  $A = K$  が成立する ( $K/L = K_i L/L = K$ )。それから、マクロでの総消費量  $C$  は  $C = c \cdot L$  と書けるから、労働人口一定の仮定の下では  $\dot{c}/c = \dot{C}/C$  となる<sup>6)</sup>。また簡単化のため、資本減耗率は同じ定率であるとし  $\delta_K = \delta_H = \delta$  を仮定する。さらに以前説明したように  $h = H/L$  であった。今後はこれらをすべて考慮した上で分析が進行していく。これらと (3) を早速 (13) に適用してみよう。

$$\begin{aligned} \frac{\dot{c}}{c} &= \frac{1}{\sigma} \left[ (1-\tau)a \left( \frac{K_i}{hL_i} \right)^{a-1} - \delta_K - \rho(\cdot) \right] \\ \frac{\dot{C}}{C} &= \frac{1}{\sigma} \left[ a(1-\tau) \left( \frac{K}{H} \right)^{a-1} - \rho(\cdot) - \delta \right] \end{aligned} \quad (14)$$

次に物的資本の動学方程式 (5) も集計表記したバージョンに書き改めることができる。

$$\begin{aligned} \dot{K} &= I - \delta K \\ \dot{K} &= (1-\tau)Y - C - \delta K \\ \frac{\dot{K}}{K} &= (1-\tau) \left( \frac{K}{H} \right)^{a-1} - \frac{C}{K} - \delta \end{aligned} \quad (15)$$

最後は人的資本の動学方程式である。(6) について、 $I_H = \tau Y$  を考慮して展開していくと、次の (16) が得られる。

<sup>6)</sup>  $C = c \cdot L$  について、両辺の対数を取り時間に関して微分すると  $\dot{c}/c = \dot{C}/C + \dot{L}/L$  となる。右辺第 2 項はゼロであるから、本文中の関係式が得られる。

$$\begin{aligned}\dot{H} &= vI_H - \delta_H H \\ \dot{H} &= v\tau K^a H^{1-a} - \delta H \\ \frac{\dot{H}}{H} &= v\tau \left(\frac{K}{H}\right)^a - \delta\end{aligned}\tag{16}$$

(14)-(16) によってモデルの動学体系が構成される。なお、横断性条件も次のように書き改めることができる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K(t)}{C(t)^\sigma} \exp\left[-\int_0^t \rho\left(\frac{C(s)}{H(s)}\right) ds\right] = 0$$

## (2) 縮約された動学体系と均衡探索の準備

ここから動学体系の導出パートの最終仕上げに入る。まず、均斉成長経路上では、消費、物的資本、人的資本は同率で成長する。したがって、 $g = \dot{C}/C = \dot{K}/K = \dot{H}/H$  の関係が成立する。次に分析を容易にするため、体系の次元を 3 次元から 2 次元に落とすことを試みる。これは新たな状態変数  $\omega \equiv C/K$  と  $z \equiv K/H$  を導入することによって可能となる。すなわち、新たな体系は次の (17) と (18) によって構成される。

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\omega}}{\omega} &= \frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{K}}{K} \\ \frac{\dot{\omega}}{\omega} &= \left(\frac{a}{\sigma} - 1\right)(1 - \tau)z^{a-1} + \omega - \frac{1}{\sigma}\rho(z\omega) - \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)\delta\end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}\frac{\dot{z}}{z} &= \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{H}}{H} \\ \frac{\dot{z}}{z} &= (1 - \tau)z^{a-1} - \omega - v\tau z^a\end{aligned}\tag{18}$$

最後に均斉成長経路上での成長率を明示的に求めておこう。(16) を使用すると、 $K/H$  の定常状態値  $\bar{z} > 0$  の関数として以下のように求められる。

$$g = v\tau \bar{z}^a - \delta\tag{19}$$

彼らの論文では言及がないが、成長率の正值性条件を明示しておこう。(19) より、以下が成立する。

$$\boxed{\text{成長率の正值性条件}} \quad g > 0 \implies \bar{z} > \left(\frac{\delta}{v\tau}\right)^{\frac{1}{a}}\tag{20}$$

次に明らかにしておかなければならないのは  $\omega$  の正值性である。均斉成長経路上では

図1 均衡が一意的に決まるケース

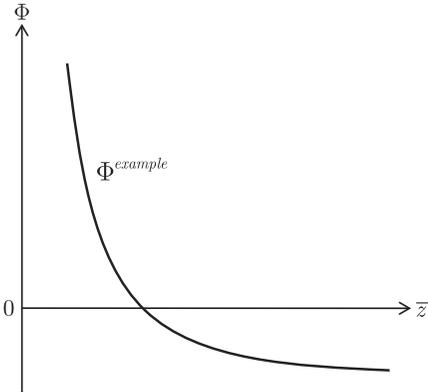
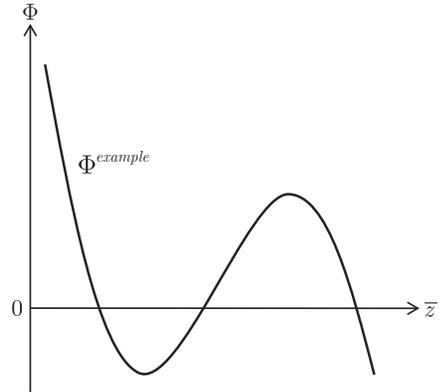


図2 複数均衡が生じるケース



$\dot{z}/z = 0$  となるから、これを (18) に適用し  $\omega$  について解くと以下を得る。

$$\bar{\omega}(\bar{z}) = (1 - \tau)\bar{z}^{a-1} - v\tau\bar{z}^a \tag{21}$$

(21) において、 $\bar{\omega}$  が  $\bar{z}$  の関数となっていることに注意しよう。 $\bar{\omega} > 0$  であるためには、以下が成立する必要がある。

$$\boxed{\bar{\omega} \text{ の 正 値 性 条 件 }} \quad (1 - \tau)\bar{z}^{a-1} - v\tau\bar{z}^a > 0 \implies \bar{z} < \frac{1 - \tau}{v\tau} \tag{22}$$

以上の分析より、長期均衡の個数に関わらず、経済学的に意味のある解が得られる場合に  $\bar{z}$  が満たすべき条件は次のようになる。

$$\left(\frac{\delta}{v\tau}\right)^{\frac{1}{a}} < \bar{z} < \frac{1 - \tau}{v\tau}$$

解析的に解を求める場合は当然として、数値解析を行う際にもこの条件を考慮する必要がある。

均斉成長均衡においては、 $\dot{\omega}/\omega = 0$  が成立する。(21) を (17) に代入すると、これも  $\bar{z}$  の関数となっている。これを  $\Phi(\bar{z})$  と置くことにしよう。

$$\Phi(\bar{z}) = \left(\frac{a}{\sigma}\right)(1 - \tau)\bar{z}^{a-1} - v\tau\bar{z}^a - \frac{1}{\sigma}\rho(\bar{z} \cdot \bar{\omega}(\bar{z})) - \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)\delta = 0 \tag{23}$$

すなわち、 $\Phi = 0$  をもたらす  $\bar{z}$  の値がその長期均衡値であり、それが 1 個の場合は均衡が一意的に決まり、2 個以上の場合には複数均衡が生じる。イメージを描いてみると、典型的なものとして図1や図2のようなケースが考えられる。

それぞれの図には、 $\Phi^{example}$  として、仮想的な例が描いてある。図1では定常均衡が一つ、図2では三つ存在することになる。こうした方法が簡単にとれば良いのであるが、集約された非線形方程式はかなり複雑なものとなっているのが普通である。事実、(23)

図 3 関数  $\Gamma$  の形状

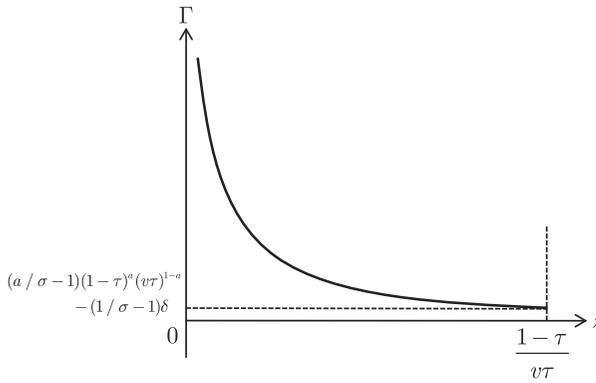
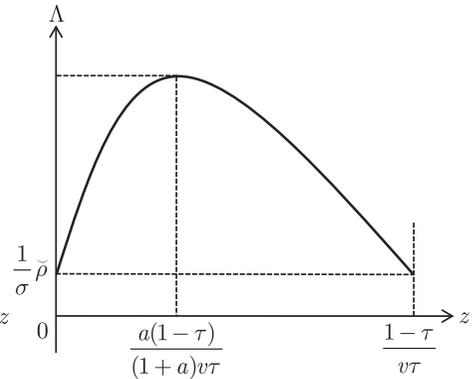


図 4 関数  $\Lambda$  の形状



を見ても容易ではなさそうである。このような場合にしばしば行われるのが、もとの関数を分析にとって適切な形で二つの関数に分割する方法である。二つの関数が、 $z > 0$  の領域でいくつ交点（均衡点）をもつかを調べることになる。このとき当然  $\omega(z) > 0$  となっている必要がある<sup>7)</sup>。二つの関数を次のように定義する。

$$\Gamma(z) \equiv \left(\frac{a}{\sigma}\right)(1-\tau)z^{a-1} - v\tau z^a - \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)\delta \quad (24)$$

$$\Lambda(z) \equiv \frac{1}{\sigma}\rho(z \cdot \omega(z)) \quad (25)$$

### 関数 $\Gamma$ のプロパティ

まず (24) より、以下のことが判明する。

$$\lim_{z \rightarrow 0} \Gamma(z) = +\infty, \quad \lim_{z \rightarrow \frac{1-\tau}{v\tau}} \Gamma(z) = \left(\frac{a}{\sigma} - 1\right)(1-\tau)^a \tau^{1-a} v^{1-a} - \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)\delta$$

$$\frac{\partial \Gamma(z)}{\partial z} < 0, \quad \frac{\partial^2 \Gamma(z)}{\partial z^2} > 0$$

したがって、関数  $\Gamma$  は適切な領域において減少関数かつ凸関数となる。これを図示すると図 3 のようになる。

### 関数 $\Lambda$ のプロパティ

次に (25) より、時間選好率パートによって構成される関数  $\Lambda$  の形状を調べよう。  $\Gamma$

7) (22) を参照のこと。またここから以降は、すべてが均斉成長均衡値での議論になるから、 $z$  と  $\bar{z}$  および  $\omega$  と  $\bar{\omega}$  は同一のものとみなす。

図5 一意均衡のイメージ

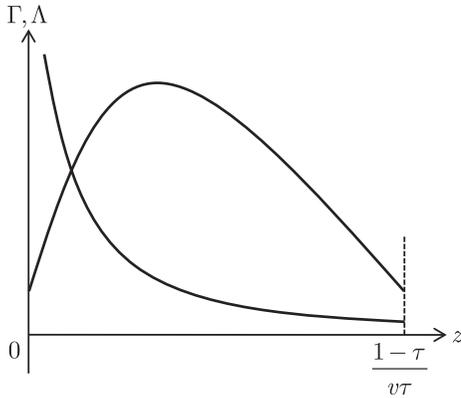
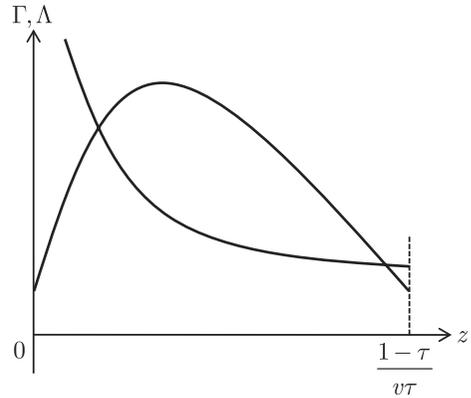


図6 複数均衡のイメージ



と同様にして分析すると、以下を得る<sup>8)</sup>。

$$\lim_{z \rightarrow 0} \Lambda(z) = \frac{1}{\sigma} \rho(0) = \frac{1}{\sigma} \rho > 0, \quad \lim_{z \rightarrow \frac{1-\tau}{v\tau}} \Lambda(z) = \frac{1}{\sigma} \rho(0) = \frac{1}{\sigma} \rho > 0$$

$$\frac{\partial \Lambda(z)}{\partial z} = \frac{1}{\sigma} \rho'(\cdot) [a(1-\tau)z^{a-1} - v\tau(1+a)z^a]$$

関数  $\Lambda$  は縦軸切片が正であり、 $z$  の右端点においても同じ値をとっていることから、U字型か逆U字型の形状をしていると推測され、以下ではこのことを調べていく。

$\Lambda$  の傾きは  $\frac{\partial \Lambda(z)}{\partial z}$  であるから、極大値か極小値をとる  $z$  のところで傾きはゼロになる。このとき、 $a(1-\tau)z^{a-1} - v\tau(1+a)z^a = 0$  となる。極値をとる左側領域で  $\frac{\partial \Lambda(z)}{\partial z} > 0$ 、右側領域で  $\frac{\partial \Lambda(z)}{\partial z} < 0$  ならば極大値をもつ。左右で符号が逆ならば極小値をもつ。いま、 $a(1-\tau)z^{a-1} - v\tau(1+a)z^a > 0 \Rightarrow z < \frac{a(1-\tau)}{(1+a)v\tau}$  なる領域 (左側領域) では、 $\frac{\partial \Lambda(z)}{\partial z} > 0$  であり、 $a(1-\tau)z^{a-1} - v\tau(1+a)z^a < 0 \Rightarrow z > \frac{a(1-\tau)}{(1+a)v\tau}$  なる領域 (右側領域) では、 $\frac{\partial \Lambda(z)}{\partial z} < 0$  である。これらより、 $\Lambda$  は  $z = \frac{a(1-\tau)}{(1+a)v\tau}$  で極大値をもつ逆U字型の形状をしていることがわかる。これを図示したものが図4である<sup>9)</sup>。

関数  $\Phi$  を分割した二つの関数の形状から、ラフな推測として二つの可能性が考えられる。一つは均衡が一意に決まるケース、もう一つは複数均衡が生じるケースである。イメージ図を描いて先行きを明るくしておくことにしよう (図5と図6)。

8) 時間選好率パートについて、 $\rho(z \cdot \omega) = \rho((1-\tau)z^a - v\tau z^{a+1})$  である。なお、彼らの論文において、 $\lim_{z \rightarrow \frac{1-\tau}{v\tau}} \Lambda(z)$  となっているのは誤植である。

9)  $0 < a < 1$  より、 $\frac{a(1-\tau)}{(1+a)v\tau} < \frac{1-\tau}{v\tau}$  である。

### (3) 均衡が一意に決まるケース

---

図 5 のイメージを念頭に置き、分析を進めていこう。z の値が相対的に小さい水準にある場合、 $\Gamma$  と  $\Lambda$  は左端では  $+\infty$  と  $(1/\sigma)\delta$  であることを考慮すると、 $\Gamma$  は  $\Lambda$  の上方に位置すると考えられる。では z の領域の右端での関係はどうなるだろうか。図 5 を見ると、均衡が一つである場合は  $\Lambda$  の右端の点が  $\Gamma$  のそれより上方に位置していなければならない。

左端に関しては条件づけは不要である。右端が上で述べたようになるためには、以下の条件が必要であり、これが均衡が一意である場合の十分条件となる。

$$\left(\frac{a}{\sigma} - 1\right)(1 - \tau)^a(v\tau)^{1-a} - \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)\delta < \frac{1}{\sigma}\delta \quad (26)$$

### (4) 複数均衡が生じるケース

---

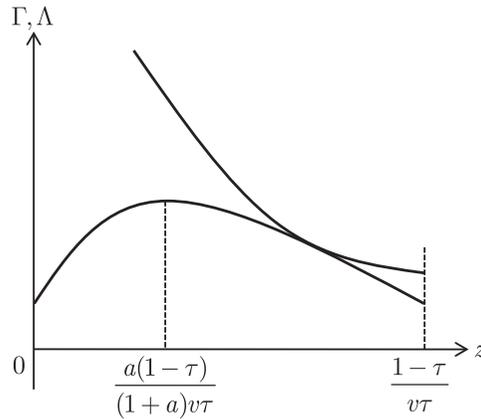
前節の議論を踏まえて分析していこう。図 6 をイメージしよう。 $\Gamma$  と  $\Lambda$  の関係では、z の領域の右端に注目すればよい。右端で  $\Gamma$  が  $\Lambda$  の上方に位置するか、交われば、均衡は二つとなって複数均衡が生じることになる。よってそのための条件は下記で表せる。

$$\left(\frac{a}{\sigma} - 1\right)(1 - \tau)^a(v\tau)^{1-a} - \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)\delta \geq \frac{1}{\sigma}\delta \quad (27)$$

以上で複数均衡下での長期均衡解の特徴づけはほぼ終了した。ここで「ほぼ」といっているのは、二つの関数が接する状況をまだ検討していないからである。その意味で (27) は複数均衡の必要条件である。

条件 (27) が十分条件となるための検討をこれから行う。端的に言って、図 7 のような状況になっていないかをチェックするのである。このようなことは減多に起こることではないが、確認しておくべき事象である。まず状況を整理しよう。関数  $\Gamma$  は z がとりうる領域において常に減少関数であった。一方、関数  $\Lambda$  は逆 U 字型 (“hump shape”) であったから、増加関数パートが転じて減少関数パートが現れる。したがって、二つの関数が接する可能性があるのは、関数  $\Lambda$  を基準にすると、その減少関数領域においてであると予想できる。極大値をとる値はすでに求められていたから、これを参考にすると、 $z > a(1 - \tau)/(1 + a)v\tau$  の領域での二つの関数のプロパティに着目すればよい。まとめると、 $\Gamma$  と  $\Lambda$  の z による 1 階導関数が、 $z > a(1 - \tau)/(1 + a)v\tau$  の領域で一致しないこ

図7 関数  $\Gamma$  と関数  $\Lambda$  が接する場合



とを示せばよい。

$$\frac{\partial \Gamma(z)}{\partial z} \neq \frac{\partial \Lambda(z)}{\partial z} \quad \text{for } z > \frac{a(1-\tau)}{(1+a)v\tau}$$

以前にすでに求めているが、 $\Lambda$  の  $z$  による 1 階導関数 ( $\partial \Lambda(z)/\partial z$ ) を再掲しておく。

$$\frac{\partial \Lambda(z)}{\partial z} = \frac{1}{\sigma} \rho'(\cdot) [a(1-\tau)z^{a-1} - v\tau(1+a)z^a]$$

これについて、いま考えている  $z$  の両端点での値を求める。左端 (逆 U 字曲線の頂点) は  $z = \frac{a(1-\tau)}{(1+a)v\tau}$  であるから、以下を得る (角括弧内がゼロ)。

$$\lim_{z \rightarrow \frac{a(1-\tau)}{(1+a)v\tau}} \frac{\partial \Lambda(z)}{\partial z} = 0$$

頂点において、 $\Lambda$  の接線の傾きはゼロであることに対応した結果である。次に右端では  $z = \frac{1-\tau}{v\tau}$  であるから、以下のように展開できる<sup>10)</sup>。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda(z)}{\partial z} &= \frac{1}{\sigma} \rho'((1-\tau)z^a - v\tau z^{1+a}) [a(1-\tau)z^{a-1} - v\tau(1+a)z^a] \\ \lim_{z \rightarrow \frac{(1-\tau)}{v\tau}} \frac{\partial \Lambda(z)}{\partial z} &= \frac{1}{\sigma} \rho'(0) [a(1-\tau)^{a-1} (v\tau)^{1-a} - (1+a)(1-\tau)^a (v\tau)^{1-a}] \\ &= -\frac{v\tau}{\sigma} \rho'(0) \left( \frac{1-\tau}{v\tau} \right)^a < 0 \end{aligned}$$

加えて、 $\rho''(\cdot) \leq 0$  を仮定すると (以前説明したように許容される仮定と考えられる)、次

10) 彼らの論文では、 $\lim_{z \rightarrow \frac{(1-\tau)}{v\tau}} \frac{\partial \Lambda(z)}{\partial z} = -\frac{\tau}{\sigma} \rho'(0) \left( \frac{1-\tau}{v\tau} \right)^a$  となっているが、誤植と思われる (867 頁)。

の結果も導出できる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Lambda(z)}{\partial z^2} &= \frac{1}{\sigma} \rho''(\cdot) [a(1-\tau)z^{a-1} - v\tau(1+a)z^a]^2 \\ &\quad + \frac{1}{\sigma} \rho'(\cdot) [a(a-1)(1-\tau)z^{a-2} - v\tau a(1+a)z^{a-1}] < 0 \end{aligned}$$

以上の結果をまとめると、 $\partial\Lambda(z)/\partial z$ は対応する $z$ の領域に応じて、0から $-\frac{v\tau}{\sigma} \rho'(0) \left(\frac{1-\tau}{v\tau}\right)^a$ へと変化する単調減少関数である。

次は $\partial\Gamma(z)/\partial z$ のプロパティを考えよう。

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Gamma(z)}{\partial z} &= \left(\frac{a}{\sigma}\right)(1-\tau)(a-1)z^{a-2} - v\tau a z^{a-1} \\ \lim_{z \rightarrow \frac{a(1-\tau)}{(1+a)v\tau}} \frac{\partial\Gamma(z)}{\partial z} &= v\tau \left(\frac{a(1-\tau)}{(1+a)v\tau}\right)^{a-1} \left[(a-1)\left(\frac{1+a}{\sigma}\right) - a\right] < 0 \\ \lim_{z \rightarrow \frac{1-\tau}{v\tau}} \frac{\partial\Gamma(z)}{\partial z} &= v\tau a \left(\frac{1-\tau}{v\tau}\right)^{a-1} \left(\frac{a-1}{\sigma} - 1\right) < 0 \end{aligned}$$

2番目と3番目より、関数 $\Gamma$ の傾きは、目下考えている $z$ の領域の両端で予想通り負である。加えて、次のことも確認できる<sup>11)</sup>。

$$\frac{\partial^2 \Gamma(z)}{\partial z^2} = a(a-1)z^{a-2} \left[ \left(\frac{a-2}{\sigma}\right) \left(\frac{1-\tau}{z}\right) - v\tau \right] > 0$$

これより、 $\partial\Gamma(z)/\partial z$ 自体は、 $v\tau \left(\frac{a(1-\tau)}{(1+a)v\tau}\right)^{a-1} \left[(a-1)\left(\frac{1+a}{\sigma}\right) - a\right]$ から $v\tau a \left(\frac{1-\tau}{v\tau}\right)^{a-1} \left(\frac{a-1}{\sigma} - 1\right)$ へと変化する増加関数である。

以上で二つの関数の1階導関数が一致しないことを保証する条件を導出する準備が整った。図をイメージしながら考えるとわかりやすい。いま傾きの大きさを考えていることに注意しよう。 $z$ の領域の左端では $\partial\Lambda(z)/\partial z = 0$ なので問題ない。ポイントとなるのは右端( $z = (1-\tau)/v\tau$ )である。ここでもう一度よく図7を見てみよう。右端において $\partial\Gamma(z)/\partial z > \partial\Lambda(z)/\partial z$ であれば、二つの関数が接点をもつ可能性を排除できない。このことから、接点をもたないための条件を導出することができる。

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \frac{1-\tau}{v\tau}} \frac{\partial\Lambda(z)}{\partial z} &> \lim_{z \rightarrow \frac{1-\tau}{v\tau}} \frac{\partial\Gamma(z)}{\partial z} \\ \implies -\frac{v\tau}{\sigma} \rho'(0) \left(\frac{1-\tau}{v\tau}\right)^a &> v\tau a \left(\frac{1-\tau}{v\tau}\right)^{a-1} \left(\frac{a-1}{\sigma} - 1\right) \\ \implies -\frac{1}{\sigma} \rho'(0) &> \left(\frac{av\tau}{1-\tau}\right) \left(\frac{a-1}{\sigma} - 1\right) \end{aligned} \quad (28)$$

11) 彼らの論文では、 $\frac{\partial^2 \Gamma(z)}{\partial z^2} = a(a-1)z^{a-2} \left[ \left(\frac{a-2}{\sigma}\right) \left(\frac{1-\tau}{z}\right) - \tau \right]$ となっていて、最後の項の $v$ が欠落しているが、誤植と思われる。

表 1 基本パラメータセット

$a$	$b$	$\delta$	$v$	$\rho$	$\tau$	$\sigma$
0.35	2	0.01	0.1	0.005	0.6	0.2 or 0.8

注 : Dioikitopoulos and Kalyvitis (2015) より筆者作成。

よって, (28) が成り立ち,  $\rho''(\cdot) \leq 0$  の下では,  $\left(\frac{a}{\sigma} - 1\right)(1 - \tau)^a(v\tau)^{1-a} - \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)\delta \geq \frac{1}{\sigma}\rho$  は, 正の成長率をもつ二つの定常均衡が存在するための十分条件になる<sup>12)</sup>。

### (5) 数値例と図解

前節までのステップを踏むことにより, 一意均衡および複数均衡の存在に関わる特徴づけを完了することができる。本節でははじめに, Dioikitopoulos and Kalyvitis (2015) で紹介されている数値解析例を図解を交えながら再現する。次に, 採用されているパラメータの適切性を議論し, その改善を試みる。さらに, 時間選好率パートをはじめとして効用関数に関わる要素を変化させて, 均衡解および均衡成長率におよぼす影響を詳しく検討する。表 1 に示されているのは, 彼らの論文で採用されているパラメータセットである。

これらのパラメータについて少し検討しておこう。資本分配率  $a$  については, 先行研究等から判断して 0.35 は標準的であると考えられる。 $b$  と  $\rho$  については説明を要するだろう。数値計算を行う上では関数形を特定化する必要がある。内生的時間選好について説明した際に採用した諸仮定を満足するような関数形として, 彼らは次のような線形の時間選好率関数を採用している。

$$\begin{aligned} \rho\left(\frac{C}{H}\right) &= b \times \left(\frac{C}{H}\right) + \rho \\ &= b \times (\omega \cdot z) + \rho \end{aligned}$$

ここで  $b$  の大きさについては, この段階で適切な値を考えることは難しい。したがってこの種の分析を進めていく上では, いくつか異なる値を試してみるべきパラメータである。時間選好率の下限值  $\rho$  は, 先行研究に鑑みて問題はないと思われる。

物的資本と人的資本に係る共通の資本減耗率  $\delta$  については, やや小さい印象を受けるが, 大きく問題になるレベルではないと思われる。次に  $v$  については, やはり事前に適

<sup>12)</sup> 彼らの論文では, (28) に対応する条件が  $-\frac{1}{\sigma}\rho'(0) > \left(\frac{v\alpha\tau}{1-\tau}\right)v\left(\frac{a-1}{\sigma} - 1\right)$  となっているが, (28) が適切であると思われる。

切な値を定めることは難しく、いくつかの可能性を試してみるべきかもしれない。比例税率 $\tau$ については、60%であるから、諸国の実態を踏まえながら平均税率として考えると高すぎると思われる。また、動学的一般均衡モデルに基づいた先行研究から見ても高率であり、改善の余地があるかもしれない。消費に関する異時点間の代替の弾力性の逆数 $\sigma$ については、 $0 < \sigma \leq 1$ が仮定されていた。筆者の諸研究(Hosoya, 2014; Hosoya, 2017)でも示されているように、一般論として複数均衡が生じるためには相対的に小さな $\sigma$ が必要になってくるが(つまり、異時点間代替性は相対的に大きくなるといけない)、先行研究を踏まえても0.2の方はいくぶん小さすぎる印象を受けた。

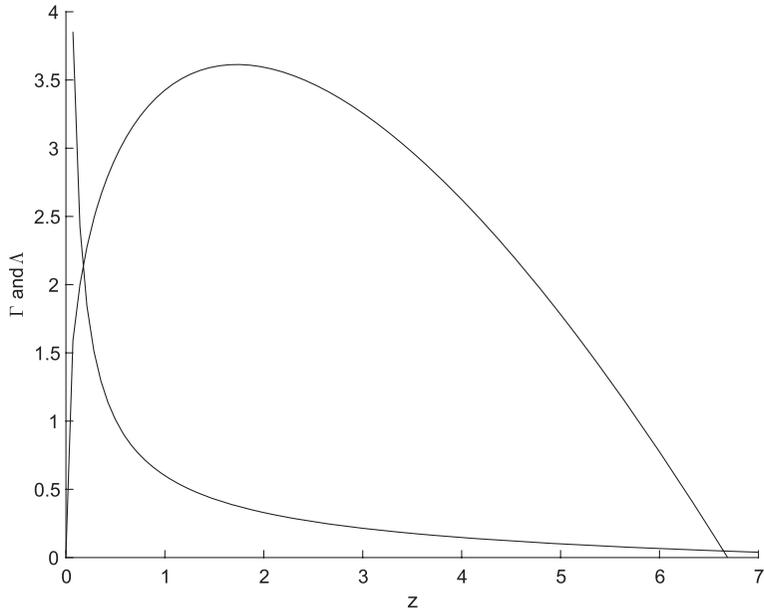
それでは数値解析の結果を見ていこう<sup>13)</sup>。はじめに複数均衡の状況が図8に示されている。後に示す単一均衡のケースとは $\sigma$ の値のみが異なることに注意しよう(複数均衡のケースでは $\sigma = 0.2$ )。得られた $z$ はともにプラスであり、0.1717と6.647であった。成長率と $\omega$ の正值性を保証する統合条件は $(\delta/v\tau)^{1/a} < \bar{z} < (1-\tau)/v\tau$ で、現行パラメータセットの下では $0.00598 < \bar{z} < 6.666667$ となる。両方の $z$ ともこれを満たしている。高位の $z$ は高率の成長率に対応しており、 $g = 0.106431$ を得る。これは10%以上であるから、かなりの高度成長を遂げる均斉成長均衡である。一方、低位の $z$ の下では $g = 0.022383$ と、2%強の成長経路が出現する。均斉成長経路に最も近いとされるアメリカ経済の過去140年間にわたる1人あたりGDPの年率平均成長率が約2%であるから、相対的に低率ではあるがまずまずの均斉成長均衡であるといえる。

次に均衡がユニークに決定される単一均衡のケースの数値解析例を見ていこう。こちらについては図9に示されている。図8のケースとの違いは $\sigma$ の値だけであり、 $\sigma = 0.8$ にセットされている。異時点間の代替の弾力性に関する主要な実証分析結果を参照すると、弾力性が1に近いこちらのケースの方がよりサポートされやすいと考えられる。前のケースと異なる大きな特徴は、関数 $\Gamma$ の値がプラスの領域に止まるのは $z = 3$ 程度までで、それを超えるとマイナスの値になってしまうことである。そのため、経済学的に意味のある定常均衡は第1象限の左端に近い方に一つだけ存在することになる。このとき $z = 0.1664$ と確認できるので、 $z$ の水準の類似性から均衡解の特徴は複数均衡のケースの低成長均衡に近いと推測できる。この値は先の統合条件が示す $z$ の領域に入っており、問題はない。対応する経済成長率は $g = 0.02203$ が得られる。

以上がDioikitopoulos and Kalyvitis (2015)が提示した数値解析例の再現である。パラメータセットの解説部分で言及したように、トピックに関わる先行研究(理論モデル分析・数値シミュレーションおよび実証分析)を踏まえると、いくつかの点で重要な改善

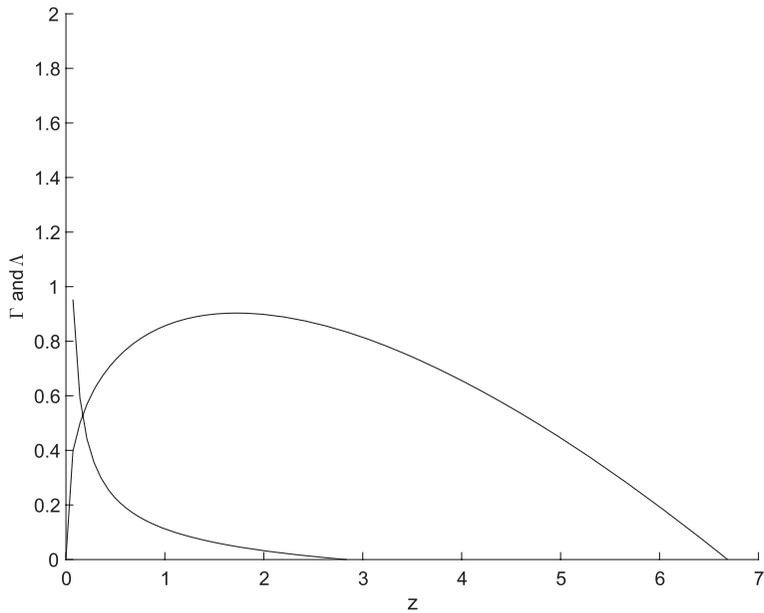
13) 本稿での数値解析シミュレーションにはMATLABを使用した。

図 8 Dioikitopoulos and Kalyvitis (2015) が提示した複数均衡のケース



注：異時点間の代替の弾力性の逆数を 0.2 に設定している。

図 9 Dioikitopoulos and Kalyvitis (2015) が提示した単一均衡のケース



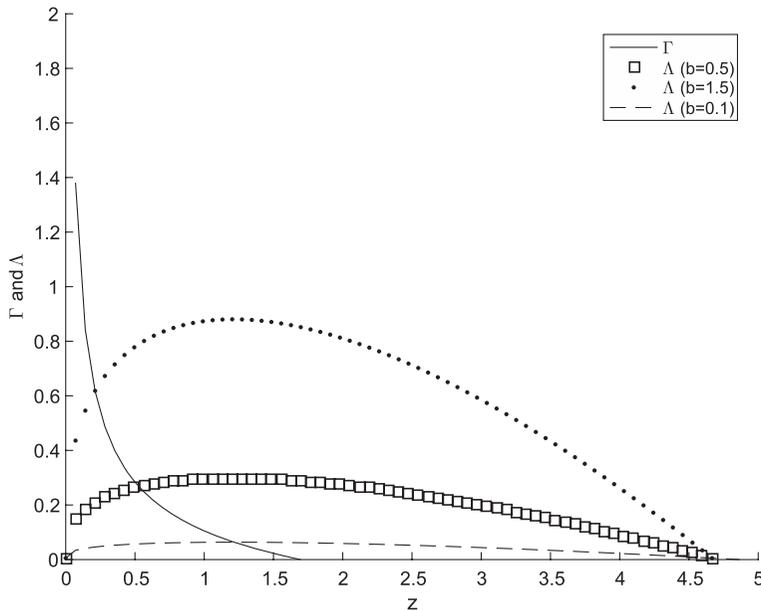
注：異時点間の代替の弾力性の逆数を 0.8 に設定している。

点が残されていると考えられる。

数値計算ソフトを走らせてみるとすぐに分かることだが、複数均衡のケースはかなり限定的な状況設定の下で生じている。よって、選好（preference）の構造（内生的時間選

表2 新たな基本パラメータと時間選好率関数における  $b$  の変化

$a$	$b$	$\delta$	$\nu$	$\rho$	$\tau$	$\sigma$
0.35	(0.5, 1.5, 0.1)	0.05	0.5	0.005	0.3	0.95

図10 異なる値の  $b$  に対する定常均衡の状況

好率、異時点間の代替の弾力性)が定常均衡にいかなる影響を与えるのかについては、均衡が一意的に定まるケースの範囲内で検討した方がより弾力的で明解な分析が可能になると思われる。この分析方針に基づき、いま少し追加的な数値シミュレーション分析を行ってみたい。

Dioikitopoulos and Kalyvitis (2015) 論文の中心的要素は内生的に決まる時間選好率であるから、それが変化することによる定常均衡への数量的インパクトを確認してみよう。なお、質的には、ケインズ・ラムゼー公式から明らかなように、他の事情を一定として、時間選好率が大きいほど経済成長率は低下することになる。まず、Dioikitopoulos and Kalyvitis (2015) の初期設定よりも適切性が高いと考えられる新たな基本パラメータを導入することにしよう。これらは表2に示してある。

一つ一つ言及しないが、実証研究結果や経済実態を考慮することにより、彼らとは異なる新たな設定値を提示してみたい。まず時間選好率関数の中において、 $b$  の値を動かしてみよう。この値についてコンセンサスが得られる値を見つけることは難しいので、0.5をベンチマーク値とし、他に二つの値を試してみる(1.5と0.1)。まず定常均衡の全般的な状況を図10に示すことにしよう。

表3  $b$  の変化と定常均衡の状況

$b$	0.5	1.5	0.1
$\bar{z} \left( \frac{K}{H} \right)$	0.5302	0.2116	1.2175
$\bar{\omega} \left( \frac{C}{K} \right)$	0.9372	1.8338	0.4553
$g$	0.0701	0.0371	0.1107
$\rho$	0.2535	0.5871	0.0604
$\left( \frac{\delta}{v\tau} \right)^{1/a}$		0.0433	
$\frac{1-\tau}{v\tau}$		4.6667	
横断性条件	○	○	○

図10には、関数  $\Lambda$  について  $b = 1.5$  に設定した場合 (点線) と  $b = 0.1$  に設定した場合 (破線) とが、ベンチマークケース (箱線) と一緒に描かれている。 $b$  の値の変化は関数  $\Lambda$  のみに影響を与える。各経済変数の値と諸条件への適合をまとめたものが表3である<sup>14)</sup>。

先に指摘したように、 $b$  を経由した  $\rho$  のサイズと  $g$  の間には理論的な関係性が存在するが、数値解析の結果からはそのことが明確に示されている ( $\rho$  と  $g$  は負の相関関係にある)。 $b$  の設定は解析結果に重大な影響をおよぼすことがわかる。そうした意味では、内生的時間選好に注目する彼らの論文の取り組みは有意義なものであると思われる。ひとまず表3の結果の総合的な評価を述べておくことにしよう。実証的な観点からは、 $g$  の値と  $\rho$  の値の組み合わせが十分に満足のゆくものではないと判断できよう。たとえば、最後の  $b = 0.1$  の場合、 $\rho$  はほぼ問題ないと考えられるが、 $g$  はいくぶん高すぎるだろう。これらは重要な改善点であり、後ほどもう一度議論することにしよう。

内生的時間選好の観点からは、時間選好率の下限値  $\rho$  の影響も検討すべきかもしれない。しかしながら、下限値設定の幅はかなり限られたものになるであろうし、これを基点とした  $\rho$  への影響、ひいては各経済変数への影響は  $b$  と同様に考えることができよう。よって下限値の問題はスキップしよう。

数々の先行研究において確認されているように、動学マクロモデルの特徴を決定づける選好パラメータは異時点間の代替の弾力性 (ないしはその逆数) である。よってこのパラメータの変化のインパクトを検討することは必須の課題であると考えられる。彼らの仮定より、当該弾力性の逆数は  $0 < \sigma \leq 1$  であった。これらから、テストするパラメータセッ

<sup>14)</sup>  $\sigma$  の値を1より小さいものと想定しているので、横断性条件の適合に関しても付記している。

表 4 異時点間の代替の弾力性の違いがもたらす影響

$a$	$b$	$\delta$	$v$	$\rho$	$\tau$	$\sigma$
0.35	0.5	0.05	0.5	0.005	0.3	(0.75, 0.5, 0.25)

図 11 異なる値の  $\sigma$  に対する定常均衡の状況

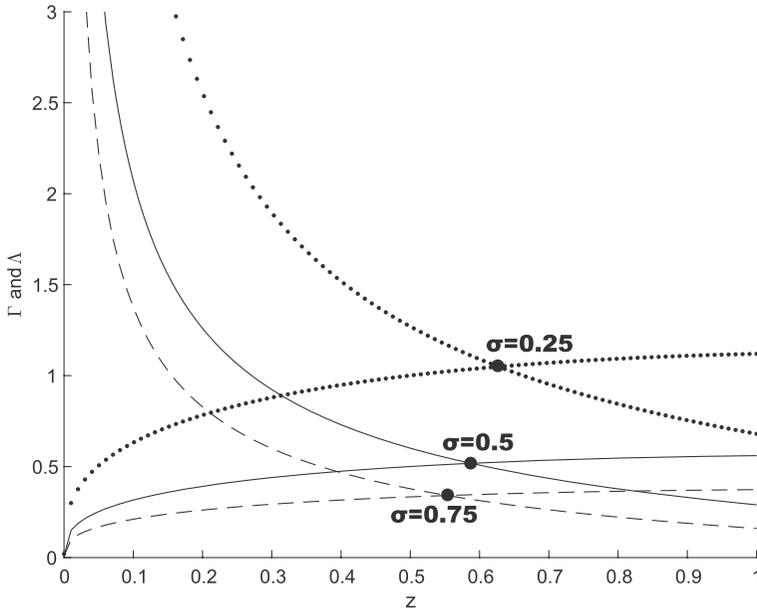


表 5  $\sigma$  の変化と定常均衡の状況

$\sigma$	0.75	0.5	0.25
$\bar{z} \left( \frac{K}{H} \right)$	0.5537	0.5874	0.6274
$\bar{\omega} \left( \frac{C}{K} \right)$	0.9060	0.8647	0.8203
$g$	0.0720	0.0745	0.0774
$\rho$	0.2558	0.2590	0.2623
$\left( \frac{\delta}{v\tau} \right)^{1/a}$	0.0433		
$\frac{1-\tau}{v\tau}$	4.6667		
横断性条件	○	○	○

トを以下のように設定してみたい (表 4)。

異時点間の代替の弾力性に関連して、三つのケースをテストする。シミュレーションの結果を図解して図 11 に示そう。 $\sigma$  の変化は関数  $\Gamma$  と関数  $\Lambda$  の両方に影響することがわかる。主要な分析結果を要約したのが表 5 である。

表6 より好ましい結果を導くパラメータセット

$a$	$b$	$\delta$	$v$	$\rho$	$\tau$	$\sigma$
0.25	0.25	0.1	0.45	0.001	0.5	0.99

$\sigma$ の値に関しても、時間選好率と同様に、ケインズ・ラムゼー公式から成長率との間に明示的な関係が示唆されるのだが、それをまず数値的に確認することができる。すなわち、 $\sigma$ が大きいほど、成長率は低くなる。興味深いのは、 $\sigma$ の比較的大きな変化に対して、成長率 $g$ にさほど大きな違いは見られない点である。ところで、表5を見ていてやはり気になるのは、表3のケースと同様に、経済成長率と時間選好率が高すぎる点である。動学的一般均衡モデルとしての完成度を高めるには、これらのフィットはぜひとも改善したい部分である。長期時系列データと合致するマイルドな成長率と実証的にサポートされ得る時間選好率の両立が図られることを目指し、本稿での数値解析パートの最後のチャレンジを行いたい。

当該分野の先行研究だけでなく、基本的なパラメータに関する実証研究も考慮すると、数値解析において許容され得る最低限のクリア条件は以下のようにまとめることができるだろう。

- 経済成長率が10%を超えないこと。すなわち、 $g < 0.1$ となること。
- 時間選好率が先行研究から見て妥当であること。ここでは、 $\rho < 0.1$ とする。
- パラメータセット、計算された物的資本・人的資本比率 $\bar{z}$ が妥当であること。
- 成長率と消費・物的資本比率 $\bar{\omega}$ の正值性条件および横断性条件が満たされること。

これらを満足するよう、これまでの結果を踏まえながら詳細な検討を行った。まだ改善の余地があると考えられるが、これまでのものと比較して一定の好ましい結果を得ることができたので提示しておきたい。使用したパラメータセットは表6に示されている。

大幅な変更がなされているパラメータがいくつかあるが、妥当性が失われるようなものではないだろう。しかしながら、資本分配率の違いなどから、マクロ経済の構造は大きく変更されたと見るべきだろう。ではこれらの下での定常均衡の様子はどのようになるだろうか。それを示したのが図12である。

これまでも確認されてきたことであるが、成長率が妥当な水準に落ち着くには、 $\bar{z}$ はかなり低い水準であることが必要である。つまり、断片的な解釈になってしまうが、資本蓄積がそれほど進んでいない経済が想定されることになる。加えて、資本分配率を考慮すると、生産活動において知識ストックの重要性が高い経済であるということもいえよう。

図 12 より好ましい定常均衡の状況

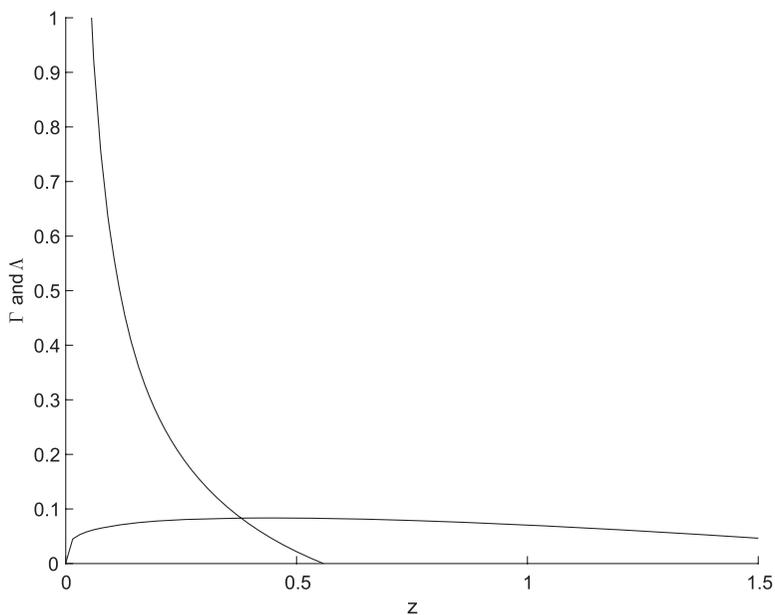


表 7 より好ましい定常均衡の状況

	(a)	(b)	(c)	(d)
$\bar{z} \left( \frac{K}{H} \right)$	0.3800	0.4678	0.5721	0.5984
$\bar{\omega} \left( \frac{C}{K} \right)$	0.8564	0.8049	0.7834	0.6897
$g$	0.0767	0.0675	0.0287	0.0187
$\rho$	0.0824	0.0763	0.0996	0.0835
$\left( \frac{\delta}{v\tau} \right)^{1/a}$	0.0390	0.0595	0.2084	0.3011
$\frac{1-\tau}{v\tau}$	2.2222	2.7160	4.0541	4.0741
横断性条件	○	○	○	○

解析結果は表 7 の (a) にまとめて示されている。

表 7 では、(a) 以外にも (b)~(d) のような好ましい結果を紹介している。これらが生成されたパラメータセットについては脚注 15 を参照されたい<sup>15)</sup>。

15) ケース (a)~(d) において、 $a = 0.25$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $\rho = 0.001$ ,  $\sigma = 0.99$  は共通である。残りのパラメータは次の通りである。

(b) :  $(b, v, \tau) = (0.2, 0.45, 0.45)$

(c) :  $(b, v, \tau) = (0.22, 0.37, 0.4)$

(d) :  $(b, v, \tau) = (0.2, 0.3, 0.45)$

### 3. まとめに代えて—これから先の分析の進め方

---

本稿では Dioikitopoulos and Kalyvitis (2015) 論文を例に取り上げ、複数均衡が生じる可能性のある動学モデルにおける均衡探索のプロセスをなるべく丁寧に詳しく検討したつもりである。経済理論的および数学的に確認すべきポイントについて、彼らの分析の展開を精確に追いつつも、他の類似する研究においても活用・参照可能なように汎用性の高いかたちで明らかにすることができたと考えている。類似の構造を有するそれぞれの論文は、こうしたプロセスを経た後で所期の応用対象に分析を進めていくことになる。彼らの場合も次善（セカンド・ベスト）の最適課税メカニズムとして位置づけられる「ラムゼー課税ルール」等の検討に歩を進めている。

ところで、モデルの基本的な解析作業は十分に尽くされたといえるであろうか。おそらく必要と考えられる全作業からすると、5~6割程度しか終えていないと思われる。この後に残っている大きな作業の一つは、大域的ないしは局所的な観点から長期均衡への移行動学 (transition dynamics) を分析することである。どのようにして均衡選択がなされ、どのような経路を移行しながら均衡へ向かうのかを調べるのである。もう一つは、最初の作業の延長上において、均衡の安定性に関する詳細な調査を行うことである。非線形方程式によって構成され、複数均衡が生じ得るようなタイプの複雑な均衡動学分析では、一般的に最適成長モデルで確かめられるようなサドル経路安定的な均衡経路だけが出現するわけではない。事実、Dioikitopoulos and Kalyvitis (2015) では、均衡点がサドル・ポイントだけでなく安定渦状点 (stable focus) になったり、均衡経路が閉軌道 (closed orbits) になったりするようなダイナミクスが確認されている<sup>16)</sup>。

以上より、本稿で提示した分析の先にもう一つ大きな山があるのだが、それに関する体系的な分析は稿を変えて行うこととしたい。

#### 参考文献

Barro, R.J., Sala-i-Martin, X., (2003) *Economic Growth*, 2nd ed. Cambridge, MA, MIT Press [バロー, R.J., サラ-イ-マーティン, X. [著], 大住圭介 [訳] (2006) 『内生的経済成長論 I・II [第2版]』九州大学出版会]。

<sup>16)</sup> こうした動学的現象を理解する上での基本文献として、経済学では Barro and Sala-i-Martin (2003, Appendix on Mathematical Methods), 数学ではスメール・ハーシュ (1976; 2003) や高橋 (1988) などがある。

- Benhabib, J., Farmer, R.E.A., (1994) Indeterminacy and increasing returns. *Journal of Economic Theory* 63(1), 19-41.
- Benhabib, J., Perli, R., (1994) Uniqueness and indeterminacy: On the dynamics of endogenous growth. *Journal of Economic Theory* 63(1), 113-142.
- Das, M., (2003) Optimal growth with decreasing marginal impatience. *Journal of Economic Dynamics and Control* 27(10), 1881-1898.
- Dioikitopoulos, E., Kalyvitis, S., (2015) Optimal fiscal policy with endogenous time preference. *Journal of Public Economic Theory* 17(6), 848-873.
- Epstein, L., Hynes, J.A., (1983) The rate of time preference and dynamic economic analysis. *Journal of Political Economy* 91(4), 611-635.
- Hosoya, K., (2014) Public health infrastructure and growth: Ways to improve the inferior equilibrium under multiple equilibria. *Research in Economics* 68(3), 194-207.
- Hosoya, K., (2017) Accounting for growth disparity: Lucas's framework revisited. *Review of Development Economics* 21(3), 874-887.
- Kawagishi, T., (2014) Investment for patience in an endogenous growth model. *Economic Modelling* 42, 508-515.
- Obstfeld, M., (1990) Intertemporal dependence, impatience, and dynamics. *Journal of Monetary Economics* 26(1), 45-75.
- Uzawa, H., (1968) Time preference, the consumption function, and optimum asset holdings. In: Wolfe, J.N. (ed.), *Value, Capital and Growth: Papers in Honour of Sir John Hicks*. Edinburgh, Edinburgh University Press, 485-504.
- 池田新介 (2003) 「合理的習慣形成の理論」小野善康・中山幹夫・福田慎一・本多佑三編『現代経済学の潮流 2003』東洋経済新報社, 59-107。
- 大住圭介・川畑公久・筒井修二編 (2006) 『経済成長と動学』勁草書房。
- 太田代 (唐澤) 幸雄 (2016) 「2 部門経済における内生的時間選好率の役割および経済政策の効果に関する一考察」『南山経済研究』第 30 卷第 3 号, 139-152。
- スメール, S・ハーシュ, M.W. [著], 田村一郎・水谷忠良・新井紀久子 [訳] (1976; 2003) 『力学系入門』岩波書店。
- 高橋陽一郎 (1988) 『微分方程式入門』東京大学出版会。
- 中田真佐男 (2011) 『基礎から学ぶ 動学マクロ経済学に必要な数学』日本評論社。
- 西村和雄・福田慎一編 (2004) 『非線形均衡動学—不決定性と複雑性』東京大学出版会。
- 西村和雄・矢野誠 (2007) 『マクロ経済動学』岩波書店。
- 二神孝一 (2012) 『動学マクロ経済学—成長理論の発展』日本評論社。
- 細谷圭 (2015) 「大学院への (での) マクロ経済分析道具箱 (1)」『東北学院大学経済学論集』第 185 号, 87-99。
- 三野和雄 (2003) 「マクロ経済動学と均衡の不決定性」『国民経済雑誌』第 188 卷第 3 号, 21-40。