

# 國學院大學学術情報リポジトリ

## フォン・ノイマンの哲学

|       |                                                                                                                                |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| メタデータ | 言語: Japanese<br>出版者:<br>公開日: 2023-02-05<br>キーワード (Ja):<br>キーワード (En):<br>作成者: 高橋, 昌一郎, Takahashi, Shoichiro<br>メールアドレス:<br>所属: |
| URL   | <a href="https://doi.org/10.57529/00000021">https://doi.org/10.57529/00000021</a>                                              |

# フォン・ノイマンの哲学

高橋昌一郎

二〇世紀を代表する天才のなかでも、ひとときわ光彩を放っているのが、ジョン・フォン・ノイマンである。彼は、わずか五三年一か月あまりの短い生涯の間に、論理学・数学・物理学・化学・計算機科学・情報工学・生物学・気象学・経済学・心理学・社会学・政治学に関する一五〇編の論文を発表した。天才だけが集まるプリンストン高等研究所の教授陣のなかでも、さらに桁違いの超人的な能力を示したノイマンは、「人間のフリをした悪魔」と呼ばれた。

彼の死後、生前の論文を集めて出版された『フォン・ノイマン著作集』は、全六巻で合計三千六百八十九ページに及ぶ。<sup>①</sup> 第一巻「論理学・集合論・量子力学」、第二巻「作用素・エルゴード理論・群における概周期関数」、第三巻「作用素環論」、第四巻「連続幾何学とその他の話題」、第五巻「コンピュータ設計・オートメタ理論と数値解析」、第六巻「ゲーム理論・宇宙物理学・流体力学・気象学」というタイトルを眺めるだけでも、彼がどれほど多彩な専門分野に影響を及ぼしたのかがわかるだろう。

驚くべきことに、プログラム内臓方式の「ノイマン型コンピュータ」、量子論の数学的基礎に登場する「ノイマン環」、ゲーム理論における「ノイマンの定理」など、二〇世紀に進展した科学理論のどの研究分野を遡っても、いずれどこかで必ず何らかの先駆者として「ノイマン」の付いた業績に遭遇する。ちなみにネットで検索すると、「ノイマン集合」、「ノイマン・モデル」、「ノイマン・パラドックス」など、彼の名前が冠された専門用語を五〇種類以上発見できるはずである。

その一方で、ノイマンがどのように世界を認識し、いかなる倫理的基準に従って行動していたのかについては、必ずしも明らかにされているわけではない。さまざまな局面で断片的に議論されることはあっても、総合的な「フォン・ノイマンの哲学」については、先行研究もほとんど皆無に等しい状況である。

改めて振り返ってみると、とくに今後の研究課題として注目されるのは、次の五点のノイマンの「哲学的見解」である。

(1) 数学の哲学（『数学者』における「数学の危機」への対応と数学的経験

論)

- (2) 物理学の哲学（『量子力学の数学的基礎』における「隠れた変数」の排除と相補性解釈）
- (3) 意思決定論（『ゲーム理論と経済行動』におけるミニマックス戦略と均衡理論）
- (4) 認知科学（『脳と機械』におけるオートメタ理論と人間機械論）
- (5) 倫理観（原水爆開発に関わる科学者責任とソ連への先制核攻撃の主張）

以下、本稿では、ノイマンの生涯を概観し、ノイマンが「数学」の本質をどのように認識していたのかに焦点を当て、「フォン・ノイマンの哲学」研究の序論としたい。<sup>(2)</sup>

## ノイマンの生涯の概観

ジョン・フォン・ノイマンは、一九〇三年一月二八日にオーストリア・ハンガリー帝国のブタペストで生まれた。<sup>(3)</sup> 裕福なドイツ系ユダヤ人家庭に生まれた彼は、幼児期から英才教育を受け、六歳の頃には銀行の顧問弁護士を務める父親と古典ギリシャ語で会話するという神童ぶりを発揮した。

ノイマンの記憶力は幼児期から抜群で、フォン・ノイマン家のパーティで彼が披露してみせたのは、客が開いた電話帳のページをその場で暗記して、客がランダムに氏名を尋ねると、ノイマンがその電話番号や住所を答え、電話番号を尋ねると、その氏名や住所を答えるというゲームだった。幼いノイマンは、六桁の電話番号の列をすべて足した和を暗算で求めることもできた。

一〇歳で母語のハンガリー語に加えて、英語・ドイツ語・フランス語・ギリシャ語・ラテン語を習得、とくに数学に目覚ましい才能を示した。ギムナジウムではどの数学教師も教えることがなくなったためブダペスト大学で数学の講座を受講して、十七歳のときに最初の論文『ある最少多項式の零点の位置について』を書いた。

十八歳でベルリン大学に進学、その後チューリッヒのスイス連邦工科大学応用化学科に転入し、同時にブダペスト大学大学院の数学科にも在籍するという離れ業を演じて、二二歳で数学博士号と化学学士号を取得した。

ロックフェラー財団のフェローとして、当時の数学界に君臨していたゲッチンゲン大学のダフィット・ヒルベルトのもとで研究を開始、三年間に二五編の独創的な論文を仕上げて、瞬く間にヒルベルト学派の旗手となった。

二四歳で史上最年少のベルリン大学私講師、二九歳でアメリカ合衆国に移住してプリンストン高等研究所教授となった。その後も多彩な分野に膨大な研究刺激を与えたことはすでに述べたとおりだが、フォン・ノイマンの業績は、アカデミックな世界だけに留まらなかった。

彼は、合衆国のコンピュータ開発と原子水爆開発計画の中樞で重責を負い、プリンストンとワシントンを分刻みのスケジュールで往復しながら、陸海空軍をはじめ、IBMやゼネラル・エレクトリック社といった大企業のコンサルタントも務めた。

一九五五年にガンを発症した後も、救急車で原子力委員会に出席したのは有名な話である。その翌年に合衆国自由勲章を授与された際には、車椅子で授賞式に出席した。当時のアイゼンハワー大統領はフォン・ノイマンの襟に勲章を付けながら、「我々には君が必要だ」と言った。フォン・ノイマンが臨終を迎えたとき、病室に横たわる彼の周囲には、国防長官や陸海空軍長官と参謀長が集まり、最後のアドバイスに耳を傾けようとした。

フォン・ノイマンは、スタンリー・キューブリック監督の映画『博士の異常な愛情』のストレンジラブ博士のモデルでもあった。彼はソ連を徹底的に敵対視して、ソ連が水爆を完成させる前に、一刻も早く合衆国からソ連へ先制核攻撃すべきだと主張した。

日本への原爆投下の標的委員会では、「歴史的文化的価値が高いからこそ京都へ投下すべきだ」と主張、「それでは戦後、ローマやアテネを破壊したのと同じ非難を世界中から浴びることになる」と陸軍長官が反対したため却下された。一方、「皇居へ投下すべきだ」という空軍提案は、戦後政策を見通したフォン・ノイマンが強硬に反対したために却下されている。

## ノイマンの『数学者』

『数学者』は、ノイマンが一九四六年にシカゴ大学で行った講演録である。<sup>(4)</sup> 日頃は最先端の研究者としか議論しなかったノイマンが、「数学」に対する彼の見解を一般聴衆にわかりやすく述べたという意味で珍しい講演録であり、彼の生前の著作をまとめた『フォン・ノイマン著作集』第一巻の巻頭を飾る貴重な作品でもある。

その前年に終結したばかりの第二次大戦で多大な功績を挙げた四三歳のフォン・ノイマンは、落ち着いたトーンで「数学」の過去を振り返り、現在の問題点を冷静に分析し、未来への警告を発している。

ノイマンは、まず「数学における最高のインスピレーションが経験から発生した」という彼の主張を「幾何学」と「微分積分法」の二つの数学的成果から丁寧に例証する。次に、二〇世紀初頭に生じた「数学の危機」に対して、「直観主義」から「ヒルベルト・プログラム」、さらに「ゲーデルの不完全性定理」に至る彼自身の意識の変遷のなかで、「絶対的な数学的真理というものについて、恥ずかしくなるくらい簡単に自分自身の考えが変化した体験」を率直に語っている。

実はノイマンは、第二不完全性定理を独立に証明していたにもかかわらず、す

でにクルト・ゲーデルが論文を書いたことを知って、潔く発表を諦めたという経験がある。その後のノイマンは、二度と数学基礎論の研究に戻ることなく、量子論や情報理論やゲーム理論などの応用数学に突き進んでいった。もしかすると、数学の起源を「経験」に求める彼の立場には、そのような実体験も影響しているのかもしれない。

いずれにしても、ノイマンが誰よりも高く評価していたゲーデルは、集合や概念などの数学的対象が「人間の定義と構成から独立して存在する」こと、そして、そのような実在的対象を仮定することは、「物理的実在を仮定することと、まったく同様に正当であり、それらの実在を信じさせるだけの十分な根拠がある」と信じていた。

このゲーデルの「数学的実在論」に真っ向から対立して、ノイマンは、「あらゆる人間の経験から切り離れたところに、数学的厳密性という絶対的な概念が不動の前提として存在するとは、とても考えられない」と述べている。ノイマンは、あくまで人間の経験と切り離せない数学という、一種の「数学的経験論」を主張しているわけである。

さらにノイマンは、数学が「審美主義的になればなるほど、ますます純粋に『芸術のための芸術』に陥らざるをえない」と皮肉を述べ、「結果的にあまり重要でない無意味な領域に枝分かれし、重箱の隅のような些事と煩雑さの集積に陥るようであれば、それは大きな危険と言えます」と警告する。要するに、「経験的な起源から遠く離れて『抽象的』な近親交配が長く続けば続くほど、数学という学問分野は墮落する危険性がある」というのが、ノイマンが「数学」に対して抱いていた危機感なのである。

以下、ノイマンの講演に沿って、古代ギリシャ時代から二十世紀の「数学の危機」に至る数学基礎論を振り返ってみよう。

## 幾何学

紀元前六世紀、ピタゴラスは、「任意の直角三角形において、斜辺を一边とする正方形の面積は、直角をはさむ二辺それぞれを一边とする正方形の面積の和に等しい」ことを導いた。これが、直角三角形の斜辺の長さをA、他の二辺の長さをBとCとするとき、「 $A^2=B^2+C^2$ 」が成り立つという「ピタゴラスの定理」である。

このようなパターンが直角三角形に認められることは、ピラミッドのような巨大建造物を設計した古代エジプト文明においても、すでに「経験的」に知られていた。したがって、ピタゴラスが、実際にピタゴラスの定理を「発見」したわけではない。ピタゴラスの最大の功績は、よく知られているように、「 $A+B$ 」と「 $A \cdot B$ 」を一边とする正方形を描くことによって、この定理を「証明」した点にあるのである。

つまり、ピタゴラスは、経験的な知識から一定の数学的パターンを抽象化し、そのパターンが「任意」の直角三角形に対して成立することを、正方形の基本的な性質から論理的に導くことに成功した。この意味で、数学に「証明」の概念を最初に持ち込んだのが、ピタゴラスなのである。

紀元前三世紀になると、ユークリッドが、幾何学を「演繹的」に体系化した。彼は、「公理」と呼ばれる命題から出発して、論理的な推論だけを用いて、「定理」と呼ばれる新たな命題を導く体系を構築した。このような体系を「公理系」と呼ぶ。

ユークリッドの定めた五つの公理は、次のようなものである。彼は、これらの命題を、理性的な人間ならば、誰もが疑いなく受け入れる「自明の共通概念」とみなした。

**公理 1** 同じものに等しいものは互いに等しい。

**公理 2** 等しいものに等しいものを加えれば、全体は等しい。

**公理 3** 等しいものから等しいものが引かれれば、残りは等しい。

**公理 4** 互いに重なり合うものは互いに等しい。

**公理 5** 全体は部分よりも大きい。

ユークリッドは、これらの公理に加えて、「公準」と呼ばれる幾何学的公理を定義し、それらを用いて、四百六十五におよぶ数学的定理を証明した。その成果としてまとめられたのが、全十三巻に及ぶ『原論』である。

その後、二千年以上にわたって、ユークリッド幾何学は、自然界の真理を表す「唯一」の幾何学とみなされてきた。十七世紀のニュートンは、絶対時間・絶対空間を前提とする力学体系『プリンキピア』を構成し、十八世紀のカントは、人間の時間・空間認識を「先天的形式」とみなす哲学を打ち立てた。これらも、すべてユークリッド幾何学を大前提として組み立てられた構成になっている。

ところが、十九世紀になると、ユークリッド幾何学が「唯一」の幾何学でないことが、相次いで証明された。たとえば、ユークリッド幾何学は、一本の直線  $L$  とその上にない一点  $P$  が与えられたとき、 $P$  を通る  $L$  の平行線を一本と定める「平行線公準」に基づいている。ところが、そのような平行線が存在しないと仮定しても、そのような平行線が二本以上存在すると仮定しても、論理的には問題が生じないことがわかったのである。

つまり、ユークリッド幾何学から平行線公準を除き、新たに「平行線公準の否定」を公準として加えても、論理的に矛盾のない公理系を幾つも構成できる。これらが、いわゆる「非ユークリッド幾何学」である。ただし、このような幾何学は、直観的に認識し難いものであり、自然界とは無関係な創造物とみなされた。

しかし、十九世紀末になると、ニュートン力学は、地球規模のスケールにしか適用できないことが、観測的事実から明らかにされた。宇宙規模のスケールの物理現象を説明するためには、重力が時空そのものを変化させるという概念が必要

だったのである。この概念を確立したのが、二十世紀初頭に発表されたアインシュタインの一般相対性理論であり、この理論は、非ユークリッド幾何学に基づいている。つまり、宇宙全体は、非ユークリッド幾何学によって、より正確に描写されることがわかったのである。

## 自然数論

非ユークリッド幾何学の成立は、数学の方法論に、根本的な変化をもたらした。要するに、二千年以上もユークリッド幾何学の公理を「自明の共通概念」として受け入れてきたことが間違いだったのである。この種の問題を解決するために、公理から「自明」のような不明確な意味を排除し、日常言語の混在も避ける必要が生じた。

そこで、数学の公理化は、一定の公理と推論規則を記号論理によって厳密に構成することから始まるようになった。この研究を「構文論」あるいは「証明論」と呼ぶ。その公理系の意味を解釈し、適用可能なモデルを研究するのが、「意味論」あるいは「モデル理論」である。つまり、構文論上で揺らぎのない公理系を人工的に確立した上で、意味論上の議論に入るという論理的なスタイルが生まれたわけである。

ここで、あらゆる数学の原点に位置する「自然数論」について考えてみよう。「自然数」とは、1、2、3、...と指で数えられる数のことであり、その加法や乗法などの演算に関する理論が自然数論である。つまり、小数点や分数以前の「算術」のことである。

自然数論を最初に公理化したのは、一八八八年のイタリアの数学者ジョセッペ・ペアノである。もちろん、これらの公理も記号論理的に厳密に構成されるのだが、日常言語で表現すると、次のようになる。

**公理 1** 1 は自然数である。

**公理 2**  $a$  が自然数であれば、 $a$  の後続数も自然数である。

**公理 3**  $a$  と  $b$  が異なる自然数であれば、 $a$  の後続数は  $b$  の後続数と等しくない。

**公理 4** 1 は、いかなる自然数の後続数でもない。

**公理 5** 1 がある性質を持ち、自然数  $a$  がその性質を持てば  $a$  の後続数もその性質を持つとき、すべての自然数はその性質を持つ。

ペアノの公理系は、「自然数」を「1」と「後続数」という二つの用語によって定義していることがわかるだろう。これらの用語は、公理系そのものからは何を意味するのか指示されていないため、「未定義用語」と呼ばれる。これらの未定義用語を、どのように解釈するかは、意味論上の問題である。

現代数学では、 $a$  の「後続数」を「 $a+1$ 」と解釈するのが普通である。ここで

見解が分かれるのは、「1」をどのように解釈するかという点である。数とは何か、数学的対象とは何か、それは「實在」するのか、あるいは「人間精神」が生み出した概念なのかなどといった意味で、哲学的議論が生じるわけである。

しかし、そのような哲学的議論を除けば、ペアノの公理系によって、すべての自然数とその性質について、純粋に論理的に議論を行なうことができる。たとえば、公理1と公理2から、 $1, 1+1, 1+1+1, \dots$  と無限に続く自然数が存在することがわかる。ここで、 $1+1=2, 1+1+1=3, \dots$  と定義すれば、10進法の自然数列  $1, 2, 3, \dots$  が生じる。公理3と公理4からは、最初の自然数が1であることや、 $1 \neq 2, 2 \neq 3, 3 \neq 4, \dots$  が導かれる。公理5は「数学的帰納法」を表し、以上の公理から生み出された対象だけが自然数であり、それ以外は自然数でないことを保証する。

## 集合論

非ユークリッド幾何学の成立に続いて、十九世紀末にドイツの数学者ゲオルグ・カントールが導入した「集合論」は、数学の基礎を高度に一般化させるという意味で、新たな衝撃を与えるものだった。

カントールは、一定の条件を満たす対象の集まりを「集合」と定義した。集合に含まれる「要素」は、人間やバナナのような物理的対象であっても、命題や数のような抽象的対象であってもかまわない。

たとえば、自然数の集合  $N=\{1,2,3,4,5,6,\dots\}$  には、奇数の集合  $O=\{1,3,5,\dots\}$  と、偶数の集合  $E=\{2,4,6,\dots\}$  が含まれる。このとき、 $N$ を「全体集合」、その部分を構成する  $O$ と  $E$ を「部分集合」と呼ぶ。また、集合の要素の個数を「基数」と呼び、集合のすべての要素間に「一対一対応」が成立するとき、その二つの集合は「同等」あるいは同じ基数を持つという。

かりに  $\{1,2,3,4,5,6\}$  の番号を付けた六人がパーティを催し、男性が奇数番号、女性が偶数番号に割り振られていたら、 $\langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 5, 6 \rangle$  の一対一対応が成立して、三組のカップルが生じる。このとき、全体集合の基数は6、部分集合の基数はいずれも3である。

カントールは、集合に関する数多くの事実を発見したが、おそらく最も驚異的な事実は、無限集合においては、全体集合と部分集合の基数が同等になるというものであろう。つまり、無限集合においては、「全体は部分よりも大きい」というユークリッドの第5公理が成立しないのである。

このことは、簡単に証明できる。全体集合を自然数の集合  $N=\{1,2,3,4,5,6,\dots\}$ 、部分集合を偶数の集合  $E=\{2,4,6,\dots\}$  とおくと、 $N$ と  $E$ の要素間には  $\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \dots, \langle n, 2n \rangle$  の一対一対応が成立する。つまり、すべての自然数は、偶数と一対一に手を繋ぐことができるのである。なぜなら、どちらも無限に続いて終わりがないためである。

カントールは、自然数の集合の基数を「 $\aleph_0$ 」と名付けた。したがって、偶数の集合の基数も、 $\aleph_0$ である。もちろん、奇数の集合の基数も同じ $\aleph_0$ になることは、明らかだろう。しかし、さらに驚くべきことに、カントールは、整数（正と負の自然数と0）や、有理数（分母が0以外の整数比）の基数も、 $\aleph_0$ であることを証明した。つまり、すべての分数は、偶数と一対一に手を繋げるのである。

無限基数の演算も興味深い。たとえば、 $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ であり、 $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$ である。ところが、累乗の演算になると、無限にも大小関係のあることが証明される。カントールは、2の $\aleph_0$ 乗（ $2^{\aleph_0}$ ）が、 $\aleph_0$ よりも大であることを証明した。一般に、集合Sの部分集合の集合を「ベキ集合」P(S)と呼ぶ。このとき、ベキ集合の基数は、集合Sの基数よりも大なのである。

実際に、カントールは、「対角線論法」によって、実数R（有理数と無理数）の基数が、自然数Nの基数よりも大であることを証明した。実数の基数は、自然数のベキ集合の基数と同等である。つまり、実数の基数は2の $\aleph_0$ 乗であり、それは $\aleph_0$ よりも大であることが明らかになったのである。

カントールは、 $\aleph_0$ 、 $\aleph_1$ 、 $\aleph_2$ 、...と無限に続く無限基数の存在を証明した。そして、これらの階層は、ベキ集合の基数の階層と一致すると考えたのである。つまり、 $\aleph_1$ は2の $\aleph_0$ 乗（ $2^{\aleph_0}$ ）、 $\aleph_2$ は2の $\aleph_1$ 乗（ $2^{\aleph_1}$ ）、...のように、無限基数が整列するものと仮定した。これが、カントールの「一般連続体仮説」である。

## 論理主義

一九〇一年春、ケンブリッジ大学の論理学者パートランド・ラッセルは、カントールの集合論の意味について考えていた。そのうちに彼は、「自分自身を要素としない集合の集合」を集合論上に定義できることに気付いた。

この集合をSとすると、S自体もSの要素であるか否かでなければならないが、そのどちらにしても矛盾が生じる。ラッセルが用いた例によると、自分自身で髭を剃らない村人の髭だけを剃る村の理髪師は、自分の髭を剃ることも剃らないこともできないのである。つまり、理髪師が自分の髭を剃っても剃らなくても、「自分自身で髭を剃らない村人の髭だけを剃る」部分に矛盾する。要するに、「嘘つきのパラドックス」に類似したパラドックスが、集合論にも含まれることがわかったのである。

ラッセルは、この発見に驚愕し、自分の推論に誤りがないか何度も確認したあげく、イエーナ大学の論理学者ゴットロープ・フレーゲに手紙で知らせた。フレーゲは、数学は論理学によって構成されるべきだという「論理主義」を基調に、『自然数論の基本法則』を書き上げたばかりだった。

フレーゲは、「仕事を完成した直後に、その基礎を動揺させられることほど悲しいことはない」という一文とともに、著書に「ラッセルのパラドックス」とい

う一章を加えて出版した。これによって世に知られた集合論のパラドックスを契機として、数学の基礎を厳密に再構成する研究が始まり、今日「数学基礎論」と呼ばれる研究分野が確立されたのである。

自然数論と並んで数学の基礎に位置する集合論の根本概念に、このように単純な矛盾が含まれているという発見は、当時の数学界に新たな衝撃を与えた。数学とは何か、人類にとって最も確実なものは何かが改めて問い直され、論争が始まった。とくに焦点となったのは、パラドックスを回避する方法ばかりでなく、いかにして数学体系の無矛盾性を確立するかという問題である。ラッセルは、彼の考案した「階型理論」によってパラドックスを解消し、さらにフレーゲの論理主義を推し進めて、論理学から全数学を導出すべきだと考えた。

ラッセルは、ケンブリッジ大学の数学者アルフレッド・ホホワイトヘッドに協力を求めた。二人は、論理主義を完全にシステム化するという意図で合意し、共同研究を開始した。その後、七年以上におよぶ共同執筆の末、一九一〇年から一九一三年にわたって刊行された三巻の大著が、『プリンキピア・マテマティカ』である。

英文で千ページ以上におよぶ『プリンキピア・マテマティカ』は、ユークリッドの『原論』やニュートンの『プリンキピア』に匹敵する情熱で書かれた。主としてラッセルが哲学的問題、ホホワイトヘッドが数学的問題を扱い、互いに草稿を検討した。この間、ラッセルもホホワイトヘッドも「狂気と隣り合わせの状態」だったという。しかし、彼らは、述語論理の公理系から出発し、自然数論、実数論、解析学を導出することに一応の成功を修めた。この公理系が、後に不完全性定理の証明に用いられたわけである。

## 直観主義

一方、論理主義が用いる数学的概念そのものに徹底的な懐疑を表明したのが、アムステルダム大学の数学者ライツェン・ブラウワーだった。彼らの主張する「直観主義」の源泉は、カント哲学にある。

最初に数学界にカント哲学を持ち込んだベルリン大学の数学者レオポルド・クロネッカーは、「自然数は、神が創造した。それ以外の数は、すべて人間の創作である」と述べたことで知られる。彼は、自然数論にみられるような、直観的に明白な数学的言語と構成方法以外は、受け入れるべきではないと考えた。したがって、クロネッカーは、カントールの「無限集合」や「無限基数」といった概念そのものを否定し、「集合論」は数学ではなく「神秘主義」だと批判した。

ブラウワーは、クロネッカーの見解をさらに発展させて、数学は「人間精神の産物」であり、人間精神を離れた数学は存在しないと考えた。人間精神は、限られた数学的概念に直接的な「直観」を与え、その直観が数学に確実性を与える。

直観は、論理でも形式でもなく、概念を受け入れるか否かの「判断」とみなされる。ブラウワーによれば、ラッセルのパラドックスこそが論理主義の欠陥を露にするものだった。

そこでブラウワーが導いたのは、数学の基礎に問題を生じさせる「一般的な妥当性」や「存在」の概念をすべて放棄するという方法だった。このような直観主義に基づく数学であれば、パラドックスが生じることはなく、厳密性を保つこともできるが、その一方で、あまりにも多くの数学的概念を犠牲にしなければならない。カントールは、「数学の本質は、その自由にある」と述べたことで知られるが、直観主義は、その「自由」を数学者自ら放棄する主張とみなされたわけである。

## 形式主義

フレーゲからラッセルとホワイトヘッドにいたる論理主義は、基本的に数学を論理学の一部とみなし、述語論理の公理系から数学を導出しようとするものだった。したがって、その方法は非常に複雑で難解なものになり、まさに直観的に受け入れ難い「還元公理」や「無限公理」と呼ばれる特殊な公理を採用しなければならなかった。『プリンキピア・マテマティカ』で「 $1 + 1 = 2$ 」を証明するために数百ページが費やされたのも、そのためである。

これに対して、ヒルベルトは、必ずしも数学を論理学から導出する必要はなく、一般に構文論に基づく公理系を厳密に構成し、その無矛盾性と完全性を証明することさえできれば、公理系の基礎を確実にすることができると考えた。この場合、数学は、その公理系の意味論上の「解釈」として与えられるわけである。ヒルベルトは、彼自身が厳密に公理化した幾何学において、その公理系の未定義記号を「点」や「線」の代わりに「椅子」や「机」と解釈してもよいと述べている。

ヒルベルトは、「人間性の名誉」のためにも、彼の「形式主義」を完遂させるべきだと世界の数学者に訴え、多くの支持者を得た。そのために重要な目標となるのが、述語論理・自然数論・集合論における完全性と無矛盾性の問題である。彼は、全数学者が協力して、この目標を達成すべきだと考えた。これが、いわゆる「ヒルベルト・プログラム」である。

## 不完全性定理

ここでノイマンの『数学者』に話を戻そう。一九三〇年、ゲーデルは、「最も注目に値する結論」を導いたが、それが「不完全性定理」である。第一不完全性定理によれば、無矛盾な数学的体系には決定不可能な「ゲーデル命題」が存在し、第二不完全性定理によれば、数学的体系の無矛盾性は、その体系内では証明不可

能である。<sup>(5)</sup>

当時は、ヒルベルト・プログラムの意向によって、公理系の構文論的な無矛盾性が追究されていたが、ゲーデルは、誰も気付かなかった相対的なアプローチを試みた。彼は、数学における「真理性」と「証明可能性」が異なるという直観から出発し、証明可能性を自然数論の関数で表現しようと考えたのである。そして彼は、この過程において「ゲーデル数化」の概念を発見し、ゲーデル命題を導くことによって、不完全性定理を証明することができたのである。

ゲーデルの不完全性定理は、全数学を論理学から導出しようとする論理主義が不可能であることを示すと同時に、ノイマンも認めているように、「ヒルベルトのプログラムが本質的に達成不可能であることを証明する」ことによって、形式主義にも大きな打撃を与えた。しかもゲーデルの証明は、「最も厳密な直観主義的な基準をも満足させる」ものであった。

ノイマンは、論理主義・直観主義・形式主義の論争から不完全性定理に至る経緯を詳細に説明した後、その理由として、「数学的厳密性をあまりにも当然の不動の前提として受け取ることに對して警告を発したかったから」だと述べている。ノイマンほどの天才が、「恥ずかしくなるくらい簡単に自分自身の考えが変化した体験」を踏まえて「警告」を発していることには、大きな注意が必要であろう。

## 注

- (1) John von Neumann, *Collected Works of John von Neumann*, 6 Vols., edited by Abraham Taub, New York: Pergamon Press, 1961-1963.
- (2) 高橋昌一郎『ノイマン・ゲーデル・チューリング』筑摩書房（筑摩選書）、二〇一四年。本書は本稿を発展させて同時代の二人の天才と比較研究した内容であり、重複部分を含むことをお断りしておきたい。
- (3) Norman Macrae, *John von Neumann*, New York: Random House, 1992. (ノーマン・マクレイ著／渡辺正・芦田みどり訳『フォン・ノイマンの生涯』朝日新聞社、一九九八年。) 以下、ノイマンの生涯については本書および前掲書を参照。
- (4) John von Neumann, "The Mathematician," *Collected Works of John von Neumann: Volume 1: Logic, Theory of Sets and Quantum Mechanics*, edited by Abraham Taub, pp. 1-9, New York: Pergamon Press, 1961. (ジョン・フォン・ノイマン著／高橋昌一郎訳「数学者」『現代思想：総特集フォン・ノイマン』(青土社) 第41巻第10号, pp.10-24, 二〇一三年七月。)
- (5) 高橋昌一郎『ゲーデルの哲学』講談社（現代新書）、一九九九年。